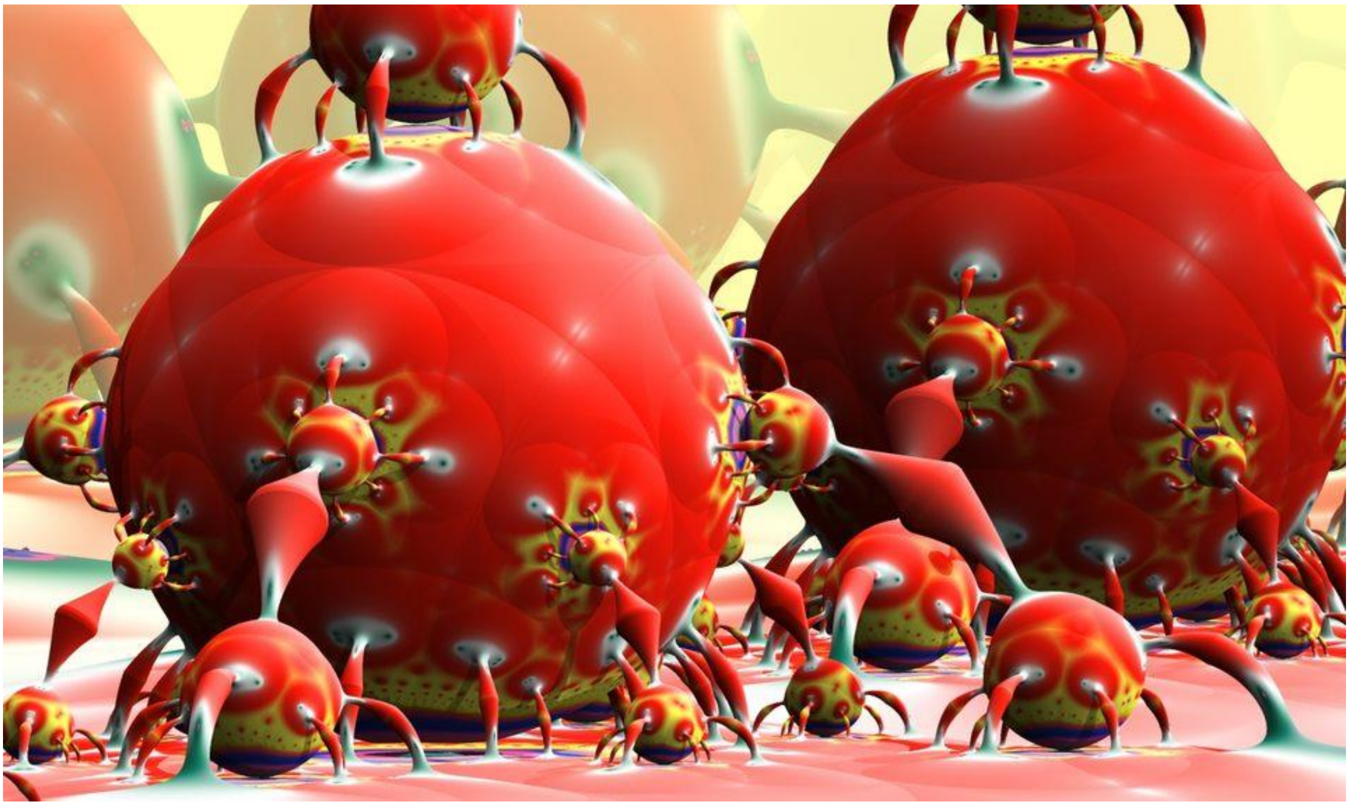
RALLYE MATHEMATIQUE

DE BOURGOGNE

2021 : 39^{e} rallye



Mandelbox089, avec l'aimable autorisation de Jos Leys (http://www.josleys.com)

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

Faculté Sciences Mirande - B.P. 47 870 - 21078 DIJON cedex

☎ 03 80 39 52 30 - Télécopie 03 80 39 52 39

e-mail "iremsecr@u-bourgogne.fr" – http://irem.u-bourgogne.fr

1. ÉNONCÉS 2021

<u>Exercice 1 : PANACHAGE DE CAFÉS</u>

Gaston est torréfacteur, il vend des mélanges de trois arabicas.
Un mélange contenant 20% de Huehuetenango, 30% de Tarrazu et 50% de Yirgacheffe coûte 8,90 € le kilo.
Un autre mélange contenant autant de Huehuetenango que de Tarrazu, mais deux fois moins de Yirgacheffe, coûte 9,60 € le kilo.
Quel est le prix d'un kilo de mélange composé d'un dixième de Huehuetenango, un quart de Tarrazu et le reste de Yirgacheffe ?

<u>Exercice 2 : CERCLE DE DIVISEURS</u>

Placer 10 entiers naturels tous différents autour d'un cercle de telle sorte que :
- leur somme soit égale à 100 ;
- chacun soit un diviseur de la somme de ses deux voisins.

<u>Exercice 3 : CRYPTARITHME</u>

Réussir au Rallye Mathématique de Bourgogne, cela se mérite !
Dans l'addition de mots ci-dessous, chaque lettre code un unique chiffre de 0 à 9 et deux lettres différentes codent deux chiffres différents.
Proposer une solution du problème.

$$\begin{array}{r} M\ A\ T\ H\ S \\ +\ R\ A\ L\ L\ Y\ E \\ \hline M\ E\ R\ I\ T\ E \end{array}$$

<u>Exercice 4 : LE SERPENTIN</u>

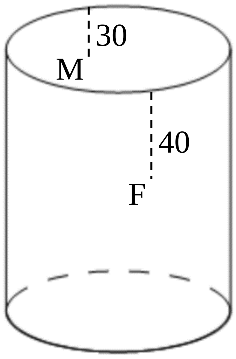
On écrit les nombres entiers jusqu'à 2021 dans des cases selon le principe suivant :

		1			
		2	3		
	6	5	4		
	7	8	9	10	
15	14	13	12	11	
...					

Quelle est la somme de tous les nombres se trouvant sur la même colonne que 2021 ? (Il est inutile de comptabiliser 2021).

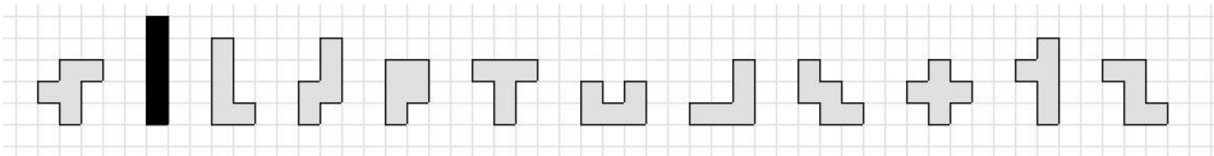
Exercice 5 : LA GOUTTE ET LA FOURMI

Un récipient cylindrique en verre, ayant pour base un cercle de rayon 60 cm, et sans couvercle, est posé sur une table.
Une fourmi est en F, à 40 cm du bord supérieur et à l'extérieur du récipient. En M, en face de F, mais à l'intérieur du récipient se trouve une goutte de miel (immobile), à 30 cm du bord supérieur.
Quelle distance minimale doit parcourir la fourmi pour atteindre la goutte ?

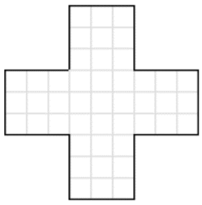


Exercice 6 : + DE PENTAMINOS

On considère la collection des douze pièces suivantes :



En utilisant obligatoirement la pièce noire et certaines des onze autres pièces, déterminer à symétrie près, plusieurs façons de remplir, sans chevauchement, la figure suivante :



Exercice 7 : PARTITIONS DE 2021

On s'intéresse à des nombres premiers distincts dont la somme est égale à 2021.
Exemple : $2021 = 1789 + 191 + 41$.
Déterminer une telle décomposition la plus longue possible.

Exercice 8 : LES 45 DÉNOMINATEURS

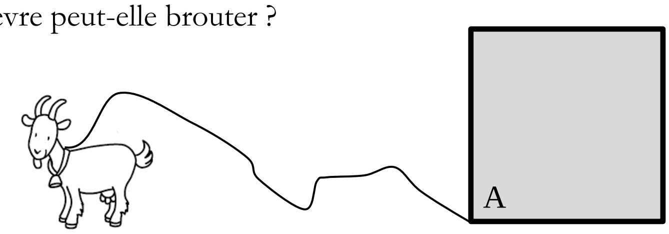
Montrer qu'en choisissant des dénominateurs convenables, l'addition ci-dessous permet d'obtenir n'importe quel nombre entier compris entre 1 et 1000.

$$\frac{1}{?} + \frac{2}{?} + \frac{3}{?} + \frac{4}{?} + \cdots + \frac{44}{?} + \frac{45}{?}$$

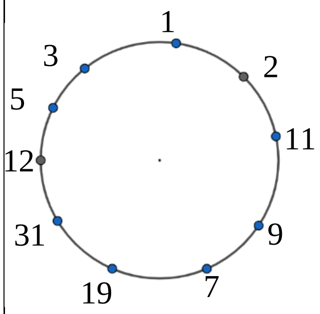
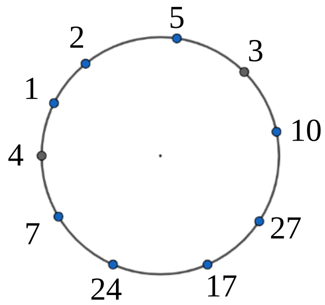
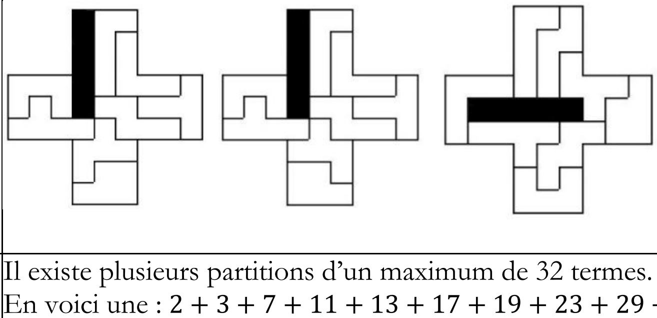
<u>Exercice 9 : LA CHÈVRE</u>

Une chèvre est attachée, par une chaîne de 40 m, au sommet A d'un bâtiment carré de 10 m de côté entouré d'une vaste pelouse.

Quelle aire maximale la chèvre peut-elle brouter ?



Solutions succinctes

Exercice	Solution
1. Panachage de cafés	Le kilo de mélange coûte 8€55.
2. Cercle de diviseurs	Voici deux exemples :  
3. Cryptarithme	2 solutions distinctes : $84610 + 743352 = 84650 + 743312 = 827962$.
4. Le serpentin	$2012 + 1895 + 1888 + 1773 + 1768 + 1655 + 1652 + 1541 + 1540 = 15724$.
5. La goutte et la fourmi	La distance minimale parcourue par la fourmi est : $\sqrt{70^2 + (60\pi)^2} \approx 201{,}07356$ cm.
6. + de pentaminos	Voici trois exemples : 
7. Partitions de 2021	Il existe plusieurs partitions d'un maximum de 32 termes. En voici une : $2 + 3 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 + 31 + 37 + 41 + 43 + 47 + 53 + 59 + 61 + 67 + 71 + 73 + 79 + 83 + 89 + 97 + 103 + 107 + 109 + 113 + 127 + 131 + 137 + 139 = 2021$.
8. Les 45 dénominateurs	Voir la correction détaillée.
9. La chèvre	Elle peut brouter une aire maximale d'environ 4847,071825 m².

2. LA PARTICIPATION

Le **39**ème Rallye mathématique de Bourgogne des lycées s'est déroulé le mercredi 26 mai 2021.
Il a concerné :

12 lycées **63 équipes** **203 participants**.

Voici l'évolution de la participation ces sept dernières années :

Année	**Côte d'Or**	**Nièvre**	**Saône et Loire**	**Yonne**	**Total des participants**
2015	309	198	149	49	**705**
2016	365	180	154	72	**771**
2017	427	172	180	69	**848**
2018	288	156	166	65	**675**
2019	319	133	166	43	**661**
2020	304	45	273	65	**687**
2021	104	30	43	26	**203**

Les effectifs par lycée et par niveau sont récapitulés ci-après.
Niveau I : secondes (générales, technologiques et professionnelles), premières générales (non spécialité mathématiques), terminales générales (élèves n'ayant pas suivi d'enseignement mathématique depuis la 2nde)
Niveau II : premières et terminales technologiques
Niveau III : premières générales (spécialité mathématiques) et terminales générales (élèves n'ayant suivi la spécialité mathématiques qu'en première)
Niveau IV : terminales (spécialité mathématiques ou option « mathématiques complémentaires »)

	Nombre de candidats				Nombre d'équipes			
Niveau	I	II	III	IV	I	II	III	IV
21 - Lycée Anna Judic	0	0	10	5	0	0	3	2
21 - Lycée Carnot	11	0	3	7	4	0	1	2
21 - Lycée Charles de Gaulle	7	0	5	27	2	0	2	7
21 - Lycée Montchapet	4	0	3	4	1	0	1	1
21 - Lycée Stephen Liégeard	8	0	0	10	2	0	0	3
58 - Lycée Maurice Genevoix	0	0	5	4	0	0	2	1
58 - Lycée Notre-Dame - Nevers	3	0	0	6	1	0	0	2
58 – Lycée Romain Rolland	4	0	2	6	1	0	1	2
71 - Lycée Niepce-Balleure	6	2	4	14	2	1	1	4
71 - Lycée Pontus de Tyard	2	0	7	8	1	0	2	2
89 - Lycée Chevalier d'Eon	4	0	3	3	2	0	1	1
89 - Lycée Jacques Amyot	3	0	9	4	1	0	3	1
Total	52	2	51	98	17	1	17	28

3. L'ORGANISATION

L'IREM (Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques), dépendant de l'Université de Bourgogne, est l'organisateur du rallye.

Le financement est assuré par l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), l'IREM et le rectorat.

L'élaboration des sujets et la correction des copies sont assurées dans le cadre de l'IREM par : Anthony OSSWALD, Florian PLASTRE et Marie WAGNER.

Trois autres personnes ont participé au choix définitif des sujets : Frédéric LEMASSON, Maurice NUSSBAUM et Anna Verkerk. Nous les remercions vivement pour leur cobayage éclairé.

Il faut remercier tout spécialement :
Madame la Rectrice de l'Académie de Dijon, Mesdames et Messieurs les Chefs d'Établissement, Adjoints et CPE, qui ont autorisé et permis la mise en place du Rallye.

Francis Cortado, William Exertier et Frédéric Lemasson, IA-IPR de mathématiques, pour leur soutien au rallye des lycées.
Frédéric MÉTIN, Directeur de l'IREM.

Tous les professeurs qui ont bénévolement assuré l'organisation matérielle du Rallye dans leur établissement et la surveillance de l'épreuve.

Edwige-Gnagna VIVIEN, qui est responsable à l'IREM de la "logistique" du Rallye et de la publication de cette brochure.

Tous ceux qui ont bien voulu chercher les problèmes posés et nous faire part de leurs idées, par courrier, par la presse régionale ou par Internet.

Et bien évidemment les 203 Bourguignons qui ont travaillé durement…

4. LA RÉUSSITE

Exercice	Nombre d'équipes	Proportion d'équipes ayant abordé le problème	Proportion d'équipes ayant donné la bonne réponse
1. Panachage de cafés	13	72,2 %	7,7 %
2. Cercle de diviseurs	12	66,7 %	8,3 %
3. Cryptarithme	14	77,8 %	21,4 %
4. Le serpentin	54	85,7 %	46,3 %
5. La goutte et la fourmi	57	90,5 %	42,1 %
6. + de pentaminos	53	84,1 %	1,9 %
7. Partitions de 2021	43	95,6 %	60,5 %
8. Les 45 dénominateurs	37	82,2 %	5,4 %
9. La chèvre	44	69,8 %	9,1 %

Les meilleures équipes sont :

Niveau I (secondes (générales, technologiques et professionnelles), premières générales (non spécialité mathématiques), terminales générales (élèves n'ayant pas suivi d'enseignement mathématique depuis la 2nde))

L'équipe : [PONGE Pénélope – FARIA-PERRON Antoine – GAVILLON Jean-Hugues – MATHIEU Paul]
du lycée Romain Rolland de Clamecy avec 32 points sur 60.

Niveau II (premières et terminales technologiques)

L'équipe : [MAUCHAMP Gwenaëlle – MAZUE Kenza]
du lycée Niepce-Balleure de Châlon-sur-Saône avec 12 points sur 60.

Niveau III (premières générales (spécialité mathématiques) et terminales générales (élèves n'ayant suivi la spécialité mathématiques qu'en première))

L'équipe : [CORNELIS Noor – CHAUVELOT Élise – LEMAITRE Lou]
du lycée Anna Judic de Semur-en-Auxois avec 42 points sur 60.

Niveau IV (terminales (spécialité mathématiques ou option « mathématiques complémentaires »))

L'équipe : [LEBRIGLE William – CLERICE Jules – ARMENJON Eline – CHESNEAU Justine]
du lycée Charles de Gaulle de Dijon avec 49 points sur 60.

Nous déclarons meilleure « équipe » du rallye 2021

LEBRIGLE William – CLERICE Jules – ARMENJON Eline – CHESNEAU Justine
du lycée Charles de Gaulle de Dijon

5. LE PALMARÈS

Seules les équipes de moins de 5 élèves seront récompensées

Secondes (générales, technologiques et professionnelles), premières générales (non spécialité mathématiques), terminales générales (élèves n'ayant pas suivi d'enseignement mathématique depuis la 2nde)

1	PONGE Pénélope	FARIA-PERRON Antoine	GAVILLON Jean-Hugues	MATHIEU Paul	Lycée Romain Rolland
2	FUMEX Théotime	MISERERE Arnaud	ROUANET Colin	SEBY Maïa	Lycée Stephen Liégeard
3	DROUYNOT Titouan	GEBAUER Jiri			Lycée Carnot
4	VIDEUX Louis	M-GOWAN-SMYTH Ben	CHANAY Simon		Lycée Notre-Dame, Nevers

Premières et terminales technologiques

1	MAUCHAMP Gwenaëlle	MAZUE Kenza			Lycée Niepce-Balleure

Premières générales (spécialité mathématiques) et terminales générales (élèves n'ayant suivi la spécialité mathématiques qu'en première)

1	CORNELIS Noor	CHAUVELOT Élise	LEMAITRE Lou		Lycée Anna Judic
2	PLESSY Hugo	RAPEAU Côme	GATOUILLAT Paul	KAZAZ Maxence	Lycée Jacques Amyot
3	THOMAS Alexandre	AASEROD Eivind	BANHEGYI Anaïs	MAUJONNET Ambre	Lycée Pontus de Tyard

Terminales (spécialité mathématiques ou option « mathématiques complémentaires »)

1	LEBRIGLE William	CLERICE Jules	ARMENJON Eline	CHESNEAU Justine	Lycée Charles de Gaulle
2	CASTEL Louisa	CASTEL Emma	HIERSO-IGLESIAS Raphaël	DEMANGEOT Hugo	Lycée Montchapet
3	BONNAT Milo	DESNUES Aurélien	CORNU Lucas	BALLERET Alexis	Lycée Notre-Dame, Nevers
4	BARATOVA Malika	CLERC Eliot	MARCHAL Cédric	GUIGNOT Matthieu	Lycée Niepce-Balleure
5	TAUVEL Louison	CRESPIN Stéphanie	SKOTNICKI Maxime	BORRION Coline	Lycée Charles de Gaulle
6	CHARTIER Corentin	VASSARD Constance	VEAUX Robin		Lycée Anna Judic

Élèves cités, non récompensés

Secondes (générales, technologiques et professionnelles), premières générales (non spécialité mathématiques), terminales générales (élèves n'ayant pas suivi d'enseignement mathématique depuis la 2nde)

DESFARGES Camille	HUREZ Clémence	SOUIDI Ibtissam		Lycée Carnot
ZAROUALA Naïm	COLLIER Hadrien	BRISSOT Esther	HOUZEL Gabrielle	Lycée Carnot
VACHENC Sarah	QUENTIN Lucie	FLAMION Capucine	THALLINGER Apolline	Lycée Charles de Gaulle
DE MECKENHEIM Paul	NICOLAS Adrien	SEGUT Sarah	ZANINI Thibault	Lycée Stephen Liégeard

Premières générales (spécialité mathématiques) et terminales générales (élèves n'ayant suivi la spécialité mathématiques qu'en première)

DUREUIL Lilas	GABORIT Amaury	KHAN Théo	VIVODTZEV Maxime	Lycée Niepce-Balleure
SIMONNET Alissa	PASTORET Camille	SODOYER Enéa		Lycée Chevalier d'Eon
DE BROUX Gaëlle	DOUSSET Charlène			Lycée Romain Rolland
SIMONNET Romain	ZYANI ANDALOUSSI Adnane			Lycée Jacques Amyot

Terminales (spécialité mathématiques ou option « mathématiques complémentaires »)

MALATY Paul	BERRY Adrien	AULAGNIER Arthur	FAURE Maxime	Lycée Charles de Gaulle
LEFEVRE Hugo	GIRET Romain	MOUHIM Rayane	BUSSIERE Nathan	Lycée Charles de Gaulle
OUDOT Anaëlle	MANIERE Lise	DELAUNAY Chloé	GERAUX Agathe	Lycée Charles de Gaulle
BONGO André	FACOMPRE Louis	SAMAIN Luc	MARION Antonin	Lycée Pontus de Tyard

6. LE CORRIGÉ

<u>Exercice 1 : PANACHAGE DE CAFÉS</u>

Gaston est torréfacteur, il vend des mélanges de trois arabicas.
Un mélange contenant 20% de Huehuetenango, 30% de Tarrazu et 50% de Yirgacheffe coûte 8,90 € le kilo.
Un autre mélange contenant autant de Huehuetenango que de Tarrazu, mais deux fois moins de Yirgacheffe, coûte 9,60 € le kilo.
Quel est le prix d'un kilo de mélange composé d'un dixième de Huehuetenango, un quart de Tarrazu et le reste de Yirgacheffe ?

Solution

Notons x le prix au kilo de Huenhuetenango, y le prix du kilo de Tarrazu et z celui de Yirgacheffe.

Notons P le prix d'un kilo de mélange composé d'un dixième de Huehuetenango, un quart de Tarrazu et le reste de Yirgacheffe.

Dans ce mélange, la proportion de Yirgacheffe est $1 - 0{,}1 - 0{,}25 = 0{,}65 = \frac{13}{20}$.

L'énoncé nous permet d'établir le système suivant :

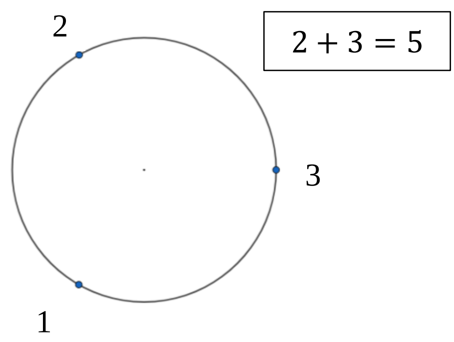
$$\begin{cases} 0{,}2x + 0{,}3y + 0{,}5z = 8{,}90 \\ \frac{2}{5}x + \frac{2}{5}y + \frac{1}{5}z = 9{,}6 \\ \frac{1}{10}x + \frac{1}{4}y + \frac{13}{20}z = P \end{cases}$$

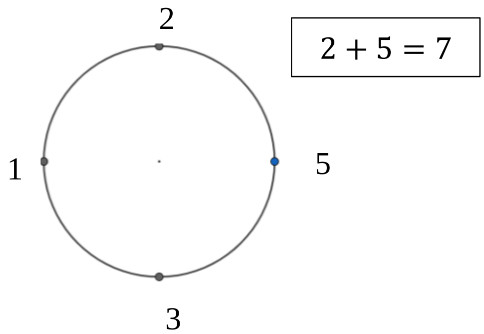
On constate que $1{,}5 \times L1 - 0{,}5 \times L2 = L3$ Donc $P = 1{,}5 \times 8{,}9 - 0{,}5 \times 9{,}6 = 8{,}55$

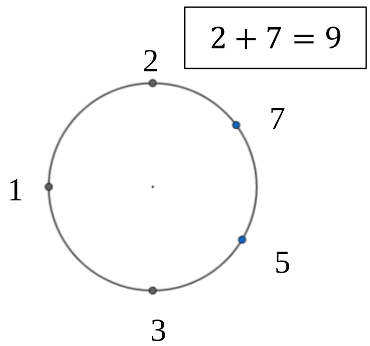
<u>Exercice 2 : CERCLE DE DIVISEURS</u>

Placer 10 entiers naturels tous différents autour d'un cercle de telle sorte que :
- leur somme soit égale à 100 ;
- chacun soit un diviseur de la somme de ses deux voisins.

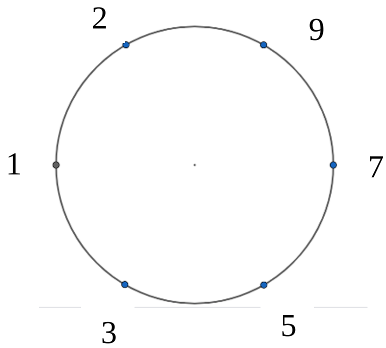
Solution



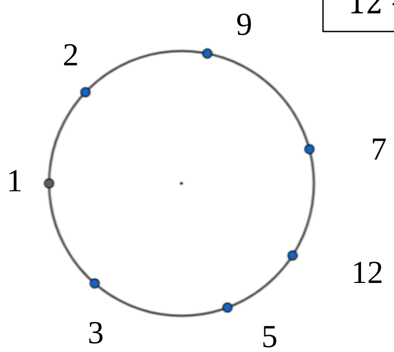




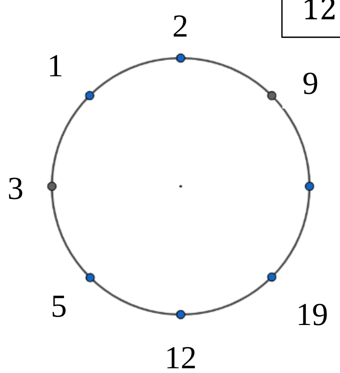
$5 + 7 = 12$

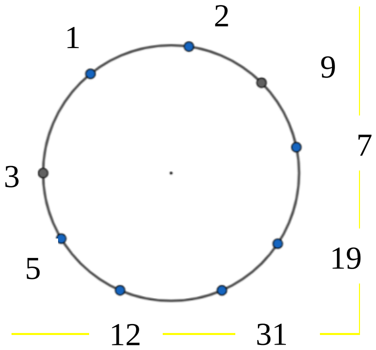


$12 + 7 = 19$

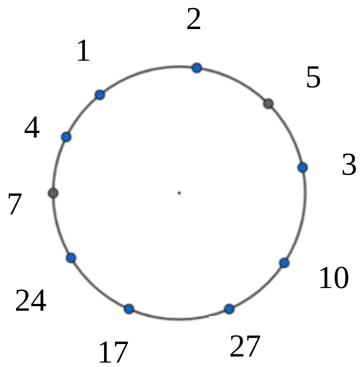


$12 + 19 = 31$





On peut aussi intercaler le 4 en deuxième étape :



<u>Exercice 3 : CRYPTARITHME</u>

Réussir au Rallye Mathématique de Bourgogne, cela se mérite !
Dans l'addition de mots ci-dessous, chaque lettre code un unique chiffre de 0 à 9 et deux lettres différentes codent deux chiffres différents.
Proposer une solution du problème.

M A T H S
+ R A L L Y E

M E R I T E

Solution
Le problème possède deux solutions distinctes : $84610 + 743352 = 84650 + 743312 = 827962$.

Exercice 4 : LE SERPENTIN

On écrit les nombres entiers jusqu'à 2021 dans des cases selon le principe suivant :

		1			
		2	3		
	6	5	4		
	7	8	9	10	
15	14	13	12	11	
...					

Quelle est la somme de tous les nombres se trouvant sur la même colonne que 2021 ? (Il est inutile de comptabiliser 2021).

Solution

Comme chaque ligne du serpentin contient un entier de plus que la précédente, le nombre qui termine la ligne de rang n du serpentin, composée de n nombres, est la somme des entiers de 1 à n, égale à $\frac{n(n+1)}{2}$. On constate également que les lignes de rang pair s'écrivent de gauche à droite et celles de rang impair s'écrivent de droite à gauche.

Le nombre 2021 se situe sur la ligne de rang 64 car $\frac{63\times 64}{2} = 2016 < 2021$ et $\frac{64\times 65}{2} = 2080 > 2021$. Ainsi :

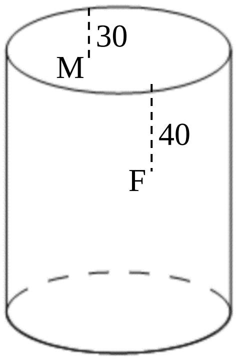
- la ligne de rang 64, composée de 64 entiers, s'écrit de gauche à droite ; elle commence par 2017 et se termine par 2080.
- la ligne de rang 63, composée de 63 entiers, s'écrit de droite à gauche et qu'elle commence par 1954 et se termine par 2016.
- la ligne de rang 62, composée de 62 entiers, s'écrit de gauche à droite et qu'elle commence par 1892 et se termine par 1953.
- la ligne de rang 61, composée de 61 entiers, s'écrit de droite à gauche et qu'elle commence par 1831 et se termine par 1991.
- …

Les neufs nombres se trouvant sur la même colonne que 2021 ont finalement pour somme :

$$2012 + 1895 + 1888 + 1773 + 1768 + 1655 + 1652 + 1541 + 1540 = 15724$$

Exercice 5 : LA GOUTTE ET LA FOURMI

Un récipient cylindrique en verre, ayant pour base un cercle de rayon 60 cm, et sans couvercle, est posé sur une table. Une fourmi est en F, à 40 cm du bord supérieur et à l'extérieur du récipient. En M, en face de F, mais à l'intérieur du récipient se trouve une goutte de miel (immobile), à 30 cm du bord supérieur.
Quelle distance minimale doit parcourir la fourmi pour atteindre la goutte ?



Solution
La face latérale du cylindre a pour patron un rectangle de longueur 120π et de largeur inconnue.

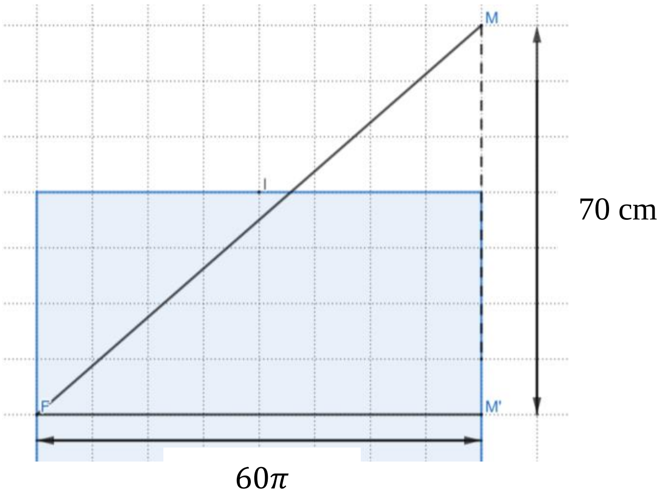
Comme F et M sont diamétralement opposé, la longueur $FM' = 60\pi$.

La distance la plus courte entre F et M est la longueur du segment FM.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle FMM' :

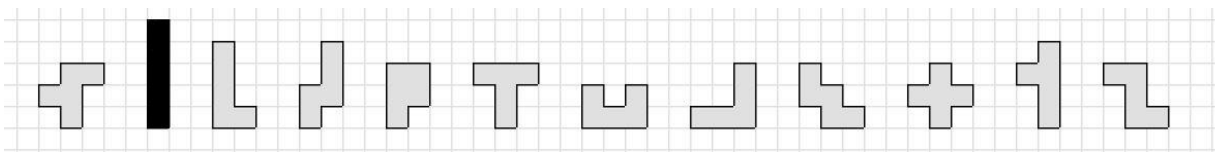
$$FM^2 = 70^2 + (60\pi)^2$$

$$FM = \sqrt{70^2 + (60\pi)^2} \approx 201{,}07356\ cm$$

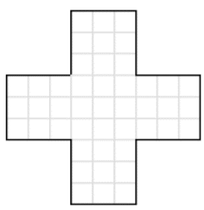


Remarque : en passant par I, la distance de F est à M est $\approx 201{,}29\ cm$.

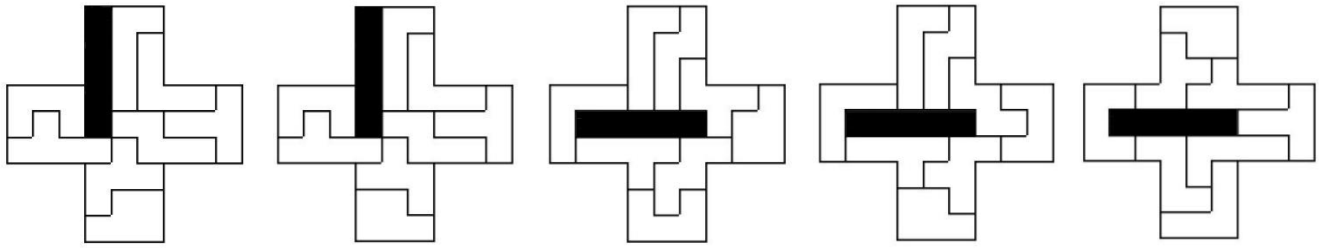
__**Exercice 6 : + DE PENTAMINOS**__
On considère la collection des douze pièces suivantes :



En utilisant obligatoirement la pièce noire et certaines des onze autres pièces, déterminer à symétrie près, plusieurs façons de remplir, sans chevauchement, la figure suivante :



Solution
À symétrie près, il existe cinq solutions seulement :



<u>Exercice 7 : PARTITIONS DE 2021</u>
On s'intéresse à des nombres premiers distincts dont la somme est égale à 2021.
Exemple : $2021 = 1789 + 191 + 41$.
Déterminer une telle décomposition la plus longue possible.

Solution
La somme des 34 premiers nombres premiers vaut :

$$2 + 3 + 5 + \cdots + 127 + 131 + 137 + 139 = 2127.$$

Pour trouver une décomposition de 2021 « assez longue » il faut donc retirer 106 en un minimum de termes (101 +5 ou 103 +3).

Donc une décomposition « assez longue » de 2021 est constituée de 32 termes.

Par exemple :

$$2 + 3 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 + 31 + 37 + 41 + 43 + 47 + 53 + 59 + 61 + 67 + 71 + 73 + 79 \\ + 83 + 89 + 97 + 103 + 107 + 109 + 113 + 127 + 131 + 137 + 139 = 2021$$

Peut-on trouver une décomposition de 33 termes ?

Il faudrait ajouter un 35$^{\text{ème}}$ nombre premier p à la somme 2127, de telle sorte que (106 + p) soit décomposable en somme de deux nombres premiers. Comme (106 + p) est impaire, elle ne peut se décomposer qu'en (2 + q), ce qui impose que q est supérieur à p et qu'il ne figure pas dans la somme des 35 termes de la partition de 2021.

De même, ajouter plusieurs nombres premiers à la somme 2127 conduit à un problème similaire…

En conclusion, les décompositions contiennent **au plus 32 termes**.

Exercice 8 : LES 45 DÉNOMINATEURS

Montrer qu'en choisissant des dénominateurs convenables, l'addition ci-dessous permet d'obtenir n'importe quel nombre entier compris entre 1 et 1000.

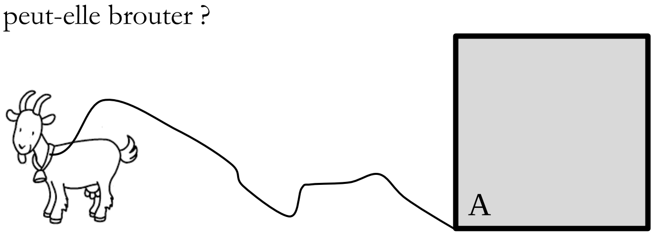
$$\frac{1}{?}+\frac{2}{?}+\frac{3}{?}+\frac{4}{?}+\cdots+\frac{44}{?}+\frac{45}{?}$$

Solution

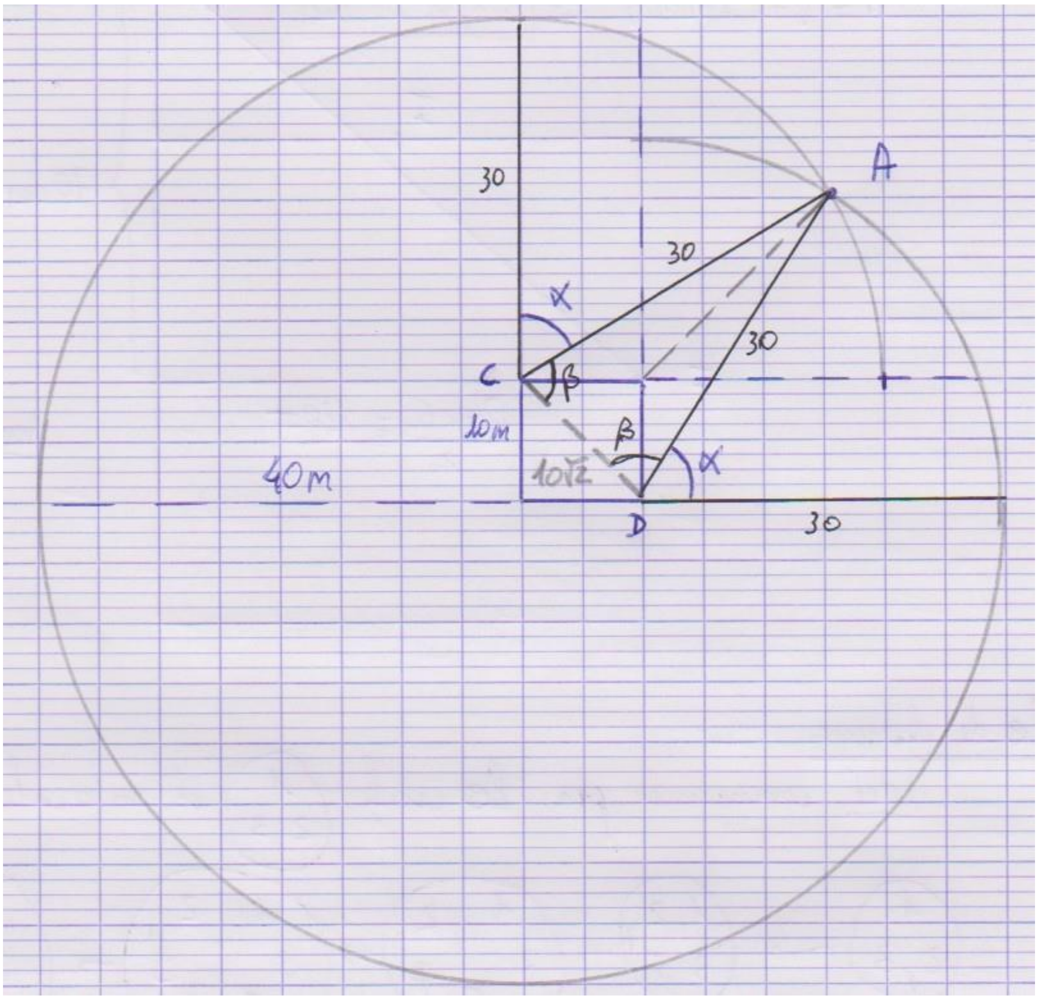
- Si tous les dénominateurs sont égaux à 1, alors la somme des fractions est $\sum_{i=1}^{45} i = \mathbf{1035}$.
- En mettant 1 partout sauf $\frac{2}{2}$ au lieu de $\frac{2}{1}$, alors la somme est $1035-2+1=1034$.
  De même, en mettant 1 partout sauf $\frac{A_1}{A_1}$ au lieu de $\frac{A_1}{1}$, alors la somme est $1035-A_1+1=1036-A_1$.
  Comme A_1 varie de 1 à 45, alors la somme peut être égale à tous les entiers compris **entre $\mathbf{991}$ et $\mathbf{1035}$**.
- De même, en mettant 1 partout sauf $\frac{A_1}{A_1}+\frac{A_2}{A_2}$ au lieu de $\frac{A_1}{1}+\frac{A_2}{1}$, alors la somme est $1035-A_1-A_2+2=1037-(A_1+A_2)$.
  Comme (A_1+A_2) varie de 3 à $44 + 45 = 99$, alors la somme peut être égale à tous les entiers compris **entre $\mathbf{938}$ et $\mathbf{1034}$**.
- On continue ainsi de suite… jusqu'à la dernière étape décrite ci-dessous.
- De même, en mettant 1 partout sauf $\frac{A_1}{A_1}+\cdots+\frac{A_{44}}{A_{44}}$ au lieu de $\frac{A_1}{1}+\cdots+\frac{A_{44}}{1}$, alors la somme est $1035-\sum_{i=1}^{44} i+44=1079-\sum_{i=1}^{44} i$.
  Comme $\sum_{i=1}^{44} i$varie de 990 à 1034, alors la somme peut être égale à tous les entiers compris **entre $\mathbf{45}$ et $\mathbf{89}$**.
- Il nous reste à obtenir les entiers de 1 à 44.
  1ère méthode : on peut vérifier qu'on peut toujours trouver une somme égale à tout entier compris **entre 1 et $\mathbf{44}$**.
  2ème méthode : si on obtient N, alors on peut obtenir aussi tous les diviseurs de N.
  Par exemple, si tous les dénominateurs sont égaux à 45, la somme des fractions est $\frac{1035}{45}=\frac{3^2\times5\times23}{45}=23$ qui est un des diviseurs de 1035.
  Comme tous les entiers compris entre 1 et 44 sont des diviseurs de nombres compris entre 45 et 1035, alors on peut tous les obtenir.

Exercice 9 : LA CHÈVRE

Une chèvre est attachée, par une chaîne de 40 m, au sommet A d'un bâtiment carré de 10 m de côté entouré d'une vaste pelouse.
Quelle aire maximale la chèvre peut-elle brouter ?



Solution



- ACD est isocèle en A : $h^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2 = 30^2 \Leftrightarrow h = 5\sqrt{34}$. Son aire est : $\frac{h\times 10\sqrt{2}}{2} = \mathbf{50\sqrt{17}}$.
- Calcul de l'angle β : $\cos\beta = \frac{5\sqrt{2}}{30}$ d'où $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$.
- Calcul de l'angle α : $\alpha = 180 - 45 - \beta = 135 - \beta = 135 - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$.
- Calcul de l'aire broutée :

  $\frac{3}{4} \times \pi 40^2 + 2 \times \frac{\alpha}{360}\pi 30^2 + 50\sqrt{17} - 50 = 1200\pi + 5\pi\left(135 - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)\right) + 50\sqrt{17} - 50$ m², soit une aire broutée d'environ $\mathbf{4847,071825}$ **m²**.

Université de Bourgogne - U.F.R. Sciences et Techniques - IREM –
9, avenue Savary - B.P. 47 870 - 21078 DIJON cedex
☎ 03 80 39 52 30 - Télécopie 03 80 39 52 39
e-mail "iremsecr@u-bourgogne.fr"
http://irem.u-bourgogne.fr/